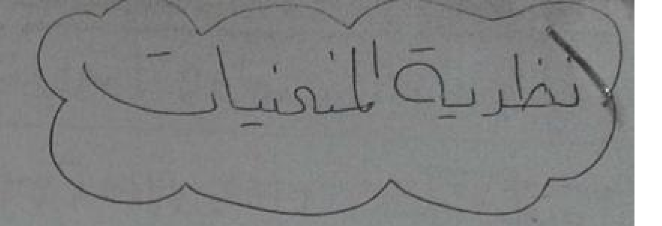


تحليل المعقدات

ثانية رياضيات

- **التطبيق الطبولوجي**: التطبيق الطبولوجي من المجموعة X إلى Y هو تطبيق تقابل مستمر مع معكوسه

$$f: X \to Y$$

المنحني الأولي: نسمي مجموعة نقاط الفضاء L منحنياً أولياً إذا كانت هذه المجموعة صورة لمجال مفتوح وفق تطبيق طبولوجي من هذا المجال إلى الفضاء.

$$f: I \subseteq \mathbb{R} \to L \subseteq \mathbb{R}^3$$

المنحني البسيط: نسمي مجموعة نقاط الفضاء L منحنياً بسيطاً إذا كانت هذه المجموعة مترابطة، ولكل نقطة من نقاطها يوجد جوار في الفضاء، بحيث إن جزء المجموعة L الواقع في هذا الجوار يشكل منحنياً أولياً.

التمثيل الوسيطي لمنحني، "المعادلات الوسيطية لمنحني"

ليكن L منحني أولي معرف بالدالة r على المجال $]\alpha, \beta[$

$$r:]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}^3$$

$$t:]\alpha, \beta[\to r(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

المعادلات

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

المعادلات الوسيطية للنقطة M على المنحني L : $M(x(t), y(t), z(t))$

- **المعادلة المتجهة للمنحني L**

$$r(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

المنحني المستوي: جميع نقاطه واقعة في مستوٍ واحد

معادلته المتجهة: $r(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$

مثال: منحني الدائرة التي نصف قطرها a:

$$C : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}$$

$$t \mapsto r(t) = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j}$$

متجه المماس لمنحني: نفرض: $r(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

نوجد: $r'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$

$\vec{r'(t)}$ متجه المماس

ونأخذ: $|r'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$

فيكون:

$$\vec{T} = \frac{\vec{r'(t)}}{|\vec{r'(t)}|}$$

متجه وحدة المماس، وحدة المماس لأن قسمنا على طويلة $\vec{r'(t)}$ (من هنا)

المستقيم المماس لمنحني: ليكن L منحني أو كي في الفضاء الثلاثي

M نقطة منه $M(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$

$\vec{r'(t_0)}$ متجه المماس للمنحني L في M

المستقيم المماس للمنحني L في النقطة $M(t_0)$ يعطى بالمعادلة المتجهة:

$$r(t) = r(t_0) + \lambda\, r'(t_0) \equiv M(t_0) + \lambda M'(t_0) \quad ; \lambda \in \mathbb{R}$$

ويعطى وسيطياً:

$$\begin{cases} x(t) = x(t_0) + \lambda x'(t_0) \\ y(t) = y(t_0) + \lambda y'(t_0) \\ z(t) = z(t_0) + \lambda z'(t_0) \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

ويمكن كتابتها بالشكل:

$$\frac{x(t) - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y(t) - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z(t) - z(t_0)}{z'(t_0)}$$

$\vec{r} = \vec{r}(t)\ ;\ t \in]\alpha, \beta[$ منحني L

نقول عن L إنه منحني نظامي إذا كانت الدالة $r(t) \in C^n$

، قابلة للاشتقاق حتى المرتبة n حيث $n \geq 1$ " بشرط أن يكون $\acute{r}(t) \neq 0$

لكل نقطة من نقاطه.

- وإذا كان $r(t) \in C^1$ عندئذ نسمي المنحني منحني أملس

، كل نظامي هو أملس أما العكس ليس صحيح ".

مثال 1: المنحني المعطى بالدالة

$$\vec{r}(t) = (t^3, 0, 0)$$

نلاحظ أن $r(t) \in C^\infty$ ، قابلة للاشتقاق عدد غير منتهي من المرات ".

لكن عندما $t = 0$ نجد

$$\acute{r} = (3t^2, 0, 0)$$

$$\acute{r}(t_0) = \acute{r}(0) = (0, 0, 0)$$

أي إن $r(t)$ ليس منحني نظامي.

مثال 2 المنحني $\vec{r}(t) = (t^3 + t, 0, 0)$ فيه

$$\acute{r}(t) = (3t^2 + 1, 0, 0) \quad ; \forall t \in \mathbb{R}$$

$r(t) \in C^\infty$ و $\acute{r}(0) = (1, 0, 0) \neq (0, 0, 0)$

$\Leftarrow$ $r(t)$ منحني نظامي

تمرين ليكن المنحني المعطى بالدالة : " يسمى هذا المنحني لولب دائري

$$\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt) \quad ; t \in \mathbb{R}$$

$a, b > 0$.

أثبت أنه منحني نظامي وأوجد متجه وحدة المماس له

واكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم المماس للمنحني في $t_0 = \frac{\pi}{4}$

الحل : $r(t) \in C^\infty$

$$\acute{r}(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$$

$$\acute{r}(0) = (0, a, b) \neq (0, 0, 0)$$

$\Leftarrow$ المنحني نظامي

$$|\acute{r}(t)| = \sqrt{(a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2} = \sqrt{a^2(\underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{1}) + b^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2}$$

فيكون متجه وحدة المماس:

$$T = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} = \frac{(-a\sin t, a\cos t, b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$= \left(\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin t, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos t, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

المعادلات الوسيطية للمستقيم المماس

$$\frac{x(t) - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y(t) - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z(t) - z(t_0)}{z'(t_0)}$$

$$\frac{x(t) + a\cos\frac{\pi}{4}}{-a\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{y(t) - a\sin\frac{\pi}{4}}{a\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{bt - \frac{b\pi}{4}}{b}$$

$$\frac{x(t) + \frac{a}{\sqrt{2}}}{-\frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{y(t) - \frac{a}{\sqrt{2}}}{\frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{bt - \frac{b\pi}{4}}{b}$$

طول قوس منحني

L منحني:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$S(t) = \int_{t_0}^{t} |\vec{r}'(\tau)| \, d\tau$$

مثال: لنجد طول قوس المنحني المعطى في التمرين السابق حيث $0 \leq t \leq 2\pi$.

الحل:

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2} \, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2+b^2} \, dt$$

$$= \sqrt{a^2+b^2} \, t \Big|_0^{2\pi} = \sqrt{a^2+b^2} \cdot 2\pi$$

: هنا طلب طول قوس المنحني فقط "

$$\int^{2\pi}$$

الوسيط الطبيعي :

$$s = s(t) = \int_{t_0}^{t} |r'(\tau)|\, d\tau$$

فمثلاً : $r = r(t)$ الدالة المتجهة بالوسيط العادي — t وسيط عادي

$r = r(s)$ الدالة المتجهة بالوسيط الطبيعي — s وسيط طبيعي

$\vec{T} = \vec{r'}(t)$ بالوسيط العادي

$\vec{T} = \vec{r'}(s) = \dot{r}$ بالوسيط الطبيعي — رمز الاشتقاق بالنسبة لـ s

تمرين : أثبت أن $\vec{r'}(s)$ ، أو « $\dot{r}$ » هو متجه واحدة . « من نظري »

الحل : لدينا

$$s = s(t) = \int_{t_0}^{t} |r'(\tau)|\, d\tau$$

نشتق بالنسبة لـ t

$$\Rightarrow s'(t) = \frac{ds}{dt} = |r'(t)|$$

فيكون :

$$\boxed{\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|r'(t)|}}$$

فكرة الاثبات أن نبين أن طويلة $\vec{r'}(s)$ هي الواحد فيكون متجه واحدة .

لنأخذ

كونه معطى r بدلالة t

$$\dot{\vec{r}} = |\vec{r'}(s)| = \left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}\right| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| \cdot \left|\frac{dt}{ds}\right| =$$

$$= |r'(t)| \cdot \frac{1}{|r'(t)|} = 1$$

وبالتالي المتجه $\dot{r}$ هو متجه واحدة ، ونقبل أنه يساوي المتجه $\vec{T}$.

تمرين : أوجد معادلة المنحني

$$r(t) = (a\cos t, a\sin t, 0) \quad ; \quad a > 0$$

بدلالة الوسيط الطبيعي s ، ثم أوجد متجهة واحدة المماس لهذا المنحني

الحل :

$$r'(t) = (-a\sin t, a\cos t, 0)$$

$$|r'(t)| = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + 0} = \sqrt{a^2} = a$$

$$S = S(t) = \int_0^t |\acute{r}(\tau)|\, d\tau = \int_0^t a\, d\tau = a\tau\Big|_0^t = at$$

$$\Rightarrow S = at \Rightarrow t = \frac{S}{a}$$

لإيجاد معادلة المنحني بالوسيط الطبيعي نبدل كل t بـ $\frac{S}{a}$:

$$r(S) = \left(a\cos\left(\frac{S}{a}\right),\ a\sin\left(\frac{S}{a}\right),\ 0 \right)$$

$$T = \dot{r} = \dot{r}(S) = \left(-\sin\frac{S}{a},\ \cos\frac{S}{a},\ 0 \right)$$

$T(S)$

تمرين: أوجد معادلة المنحني

$$r(t) = (a\cos t,\ a\sin t,\ bt)$$

$-\infty \leq t \leq +\infty$

$a, b \neq 0$

بدلالة الوسيط الطبيعي S.

الحل:

$$S = S(t) = \int_0^t |\acute{r}(\tau)|\, d\tau = \int_0^t \sqrt{a^2+b^2}\, d\tau = \sqrt{(a^2+b^2)}\ t$$

"أوجدناه سابقاً"

$$\Rightarrow S = \sqrt{a^2+b^2}\ t \Rightarrow t = \frac{S}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ويمكن أن نفرض $c = \sqrt{a^2+b^2}$ ويكون $S = ct$

" $\Rightarrow t = \frac{S}{c}$

$$r(S) = \left(a\cos\frac{S}{\sqrt{a^2+b^2}},\ a\sin\frac{S}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{bS}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

تمرين: بين أن التمثيل:

$$r(S) = \left[\frac{1}{2}\left(S+\sqrt{S^2+1}\right),\ \frac{1}{2}\left(S+\sqrt{S^2+1}\right)^{-1},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\log\left(S+\sqrt{S^2+1}\right) \right]$$

هو تمثيل طبيعي.

$$\frac{1}{S+\sqrt{S^2+1}}$$

الحل: أي لنثبت أن $\left|\frac{dr}{dS}\right| = 1$ $\quad |\dot{r}| = 1$

$$\dot{r}(s) = \left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{2s}{2\sqrt{s^2+1}}\right), \frac{1}{2} \frac{-\left(1 + \frac{s}{\sqrt{s^2+1}}\right)}{(s+\sqrt{s^2+1})^2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1 + \frac{s}{\sqrt{s^2+1}}}{s+\sqrt{s^2+1}} \right]$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{s+\sqrt{s^2+1}}{\sqrt{s^2+1}}\right), \frac{1}{2} \frac{-\frac{(s+\sqrt{s^2+1})}{\sqrt{s^2+1}}}{(s+\sqrt{s^2+1})^2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\frac{s+\sqrt{s^2+1}}{\sqrt{s^2+1}}}{s+\sqrt{s^2+1}} \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{s+\sqrt{s^2+1}}{\sqrt{s^2+1}}\right) \left[1, \frac{-1}{(s+\sqrt{s^2+1})^2}, \frac{\sqrt{2}}{s+\sqrt{s^2+1}} \right].$$

$$|\dot{r}(s)| = \frac{1}{2}\left(\frac{s+\sqrt{s^2+1}}{\sqrt{s^2+1}}\right) \sqrt{1 + \frac{1}{(s+\sqrt{s^2+1})^4} + \frac{2}{(s+\sqrt{s^2+1})^2}}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{s+\sqrt{s^2+1}}{\sqrt{s^2+1}} \sqrt{\frac{(s+\sqrt{s^2+1})^4 + 1 + 2(s+\sqrt{s^2+1})^2}{(s+\sqrt{s^2+1})^4}} \rightarrow t^4 + 2t^2 + 1 = (t^2+1)^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{s+\sqrt{s^2+1}}{\sqrt{s^2+1}} \sqrt{\frac{\left[(s+\sqrt{s^2+1})^2 + 1\right]^2}{(s+\sqrt{s^2+1})^4}}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{s+\sqrt{s^2+1}}{\sqrt{s^2+1}} \frac{(s+\sqrt{s^2+1})^2 + 1}{(s+\sqrt{s^2+1})^2}.$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} \cdot \frac{s^2 + 2s\sqrt{s^2+1} + s^2 + 1 + 1}{s+\sqrt{s^2+1}}.$$

$$= \frac{1}{2} \frac{2s^2 + 2s\sqrt{s^2+1} + 2}{s\sqrt{s^2+1} + s^2 + 1} = \frac{1}{2} \frac{2\left[s^2 + s\sqrt{s^2+1} + 1\right]}{s\sqrt{s^2+1} + s^2 + 1}$$

$$= 1$$

⇐ s هو الوسيط الطبيعي والتمثيل المعطى هو تمثيل طبيعي

"المستوي المماس لمنحني ، المستوي الملاصق"

- بفرض $r = r(t)$ منحني نظامي ، $M_0 = M(t_0)$ نقطة من المنحني
ولنفرض أن المتجهين $\acute{r}(t_0)$ ، $\ddot{r}(t_0)$ غير متوازيين ، فإننا نسمي
المستوي المار من المستقيم المماس للمنحني L في M_0 ، والموازي للمتجهين
$\acute{r}(t_0)$ ، $\ddot{r}(t_0)$ بالمستوي المماس للمنحني L في M_0 ، ونرمز له بـ Π
ومعادلته:

$$\left(R(t) - R(t_0), \acute{R}(t_0), \ddot{R}(t_0)\right) = 0$$

حيث $R(t)$ متجه الموضع لنقطة ما من المستوي المماس.

أو :

$$\begin{vmatrix} x - x(t_0) & y - y(t_0) & z - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

تقوس منحني

التقوس بدلالة الوسيط s يعطى بالعلاقة

$$k(s_0) = \left| \vec{\ddot{r}}(s_0) \right|$$

أما بدلالة الوسيط العادي فيعطى بالعلاقة:

$$k(t_0) = \frac{\left| \acute{r}(t_0) \times \ddot{r}(t_0) \right|}{\left| \acute{r}(t_0) \right|^3}$$

ادرس استنتاج هذه القوانين من النظري

- نتيجة: تقوس المنحني المعطى وسيطياً بالعلاقات:
$x = x(t)$ ، $y = y(t)$ (أي منحني سوي)
تحسب من العلاقة

$$k = \frac{\left| x' y'' - x'' y' \right|}{\left| x'^2 + y'^2 \right|^{\frac{3}{2}}}$$

نتيجة: تقوس منحني الدالة $y=f(x)$ يحسب من العلاقة:

$$k=\frac{|f''|}{|1+f'^2|^{\frac{3}{2}}}$$

($|f''|$ ← ليست ضرورية)

ملاحظة: نسمي المقدار $\rho(t)=\frac{1}{|k(t)|}$ نصف قطر التقوس للمنحني.

مثال 1: المعادلات الوسيطية لدائرة:

$$x=a\cos t$$
$$y=a\sin t \quad ; \quad a=\text{const} \quad 0\leq t<2\pi$$

a هو نصف القطر ⇐ التقوس $\frac{1}{a}$

تمرين: احسب تقوس ونصف قطر تقوس المنحني:

$$y=ch\frac{x}{a} \quad ; \quad a>0$$

وذلك في النقطة $(0,1)$

الحل: لدينا:

$$y'=\frac{1}{a}sh\frac{x}{a} \Rightarrow y'\Big|_{(0,1)}=\frac{1}{a}sh(0)=0$$

$$y''=\frac{1}{a^2}ch\frac{x}{a} \Rightarrow y''\Big|_{(0,1)}=\frac{1}{a^2}ch(0)=\frac{1}{a^2}$$

وبالتالي فإن:

$$k=\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{1}{a^2}}{1}=\frac{1}{a^2}$$

أما نصف قطر التقوس فهو:

$$\rho=\frac{1}{|k|}=a^2$$

تمرين لنأخذ المنحني المعطى وسيطياً ب:

$$x = a(t - \sin t)$$
$$y = a(1 - \cos t) \quad ; a \neq 0$$

احسب تقوس المنحني في نقطة ما منه. ونصف قطر تقوسه

الحل:

$$x' = a(1 - \cos t) \qquad y' = a\sin t$$
$$x'' = a\sin t \qquad y'' = a\cos t$$

$$K = \frac{|x'y'' - x''y'|}{|x'^2 + y'^2|^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2(\cos t - \cos^2 t) - a^2\sin^2 t}{\left(a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{a^2\cos t - a^2\cos^2 t - a^2\sin^2 t}{\left(a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{a^2\cos t - a^2\cos^2 t - a^2\sin^2 t}{\left(a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t) + a^2\sin^2 t\right)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{a^2\cos t - a^2}{\left(a^2 - 2a^2\cos t + a^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2\cos t - a^2}{(a^2)^{\frac{3}{2}}(1 - 2\cos t + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{a^2\cos t - a^2}{(2)^{\frac{3}{2}} a^3 (1 - \cos t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-a^2(1 - \cos t)}{a^3 \cdot 2\sqrt{2} \cdot (1 - \cos t)^{\frac{3}{2}}}$$

$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\sqrt{(1-\cos t)^3} = (1 - \cos t)\sqrt{1 - \cos t}$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{2}\, a\, (1 - \cos t)^{\frac{1}{2}}}$$

$1 - \cos t \rightarrow 2\sin^2 \frac{t}{2}$

$$\Rightarrow K = \frac{-1}{2\sqrt{2}\, a \cdot \sqrt{2}\sin\frac{t}{2}} \qquad \Rightarrow K = \frac{-1}{4a\sin\frac{t}{2}} \quad ; \frac{t}{2} \neq \pi n, \; n \in \mathbb{Z}, \; t \neq 2\pi n$$

تمرين احسب تقوس المنحني المعطى بالعلاقة:

$$r(t) = \left(t, \tfrac{1}{2}t^2, \tfrac{1}{3}t^3\right)$$

وذلك في النقطة $t_0 = 1$ منه.

الحل:

$$r'(t) = (1, t, t^2)$$

$$r''(t) = (0, 1, 2t)$$

$$r' \times r'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & t & t^2 \\ 0 & 1 & 2t \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i} + 2t\vec{j} + t^2\vec{k}$$

$$|r' \times r''| = \sqrt{1 + 4t^2 + t^4}$$

$$|r'(t_0) \times r''(t_0)| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$

$$|r'| = \sqrt{1 + t^2 + t^4}$$

$$|r'(t_0)| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$k = \frac{|r' \times r''|}{|r'|^3} = \frac{\sqrt{6}}{(\sqrt{3})^3} = \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

الناظم وثنائي الناظم لمنحني

وسيط عادي $\vec{N} = \dfrac{\vec{T'}(t)}{|\vec{T'}(t)|}$.

وسيط طبيعي $\vec{N} = \dfrac{\vec{\ddot{r}}(s)}{|\vec{\ddot{r}}(s)|}$

عادي $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$

طبيعي $\vec{B} = \vec{\dot{r}}(s) \times \dfrac{\vec{\ddot{r}}(s)}{|\vec{\ddot{r}}(s)|}$

التفاف منحني

بدلالة الوسيط الطبيعي $\tau(s) = \dfrac{|(\dot{r}, \ddot{r}, \dddot{r})|}{\ddot{r}^2}$

بدلالة الوسيط العادي $\tau(t) = \dfrac{|(r', r'', r''')|}{|r' \times r''|^2}$

تمرين | ليكن المنحني المعطى بالشكل :

$f:[0,1] \to (2t,t,2t)$

1) احسب $S(t)$
2) شعاع واحدة المماس بالنسبة لـ s , t
3) احسب $\vec{N}$

الحل : $;\forall t \in [0,1]$ $\quad S(t)=\int_0^t |f'(\tau)|\, d\tau$

$f'(t)=(2,1,2)$

$|f'(t)| = \sqrt{4+1+4} = 3$

$S(t)=\int_0^t 3\, d\tau = 3\tau\Big|_0^t = 3t \Rightarrow s=3t \Rightarrow t=\frac{s}{3}$

$\vec{T}(t) = \frac{f'(t)}{|f'(t)|} = \frac{1}{3}(2,1,2) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

للحصول على $T(s)$ نبدل في $T(t)$ كل t بـ s و بسبب كونه ثابت نجد أنه نفسه "

$\vec{T}(s) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

الناظم $=0$ لأن $\vec{T}$ ثابت.

تمرين | ليكن لدينا المنحني المعطى بالشكل :

$f:[0,\pi] \to \mathbb{R}^3$

$t:(3\cos t, 3\sin t, 3t)$

1) احسب $S(t)$
2) احسب T شعاع وحدة المماس بالنسبة لـ s , t
3) أوجد $\vec{N}$, $\vec{B}$, ص نصف قطر التقوس

$$s(t) = \int_0^t |f'(\tau)|\, d\tau \qquad \forall t \in [0, \pi] \qquad :\text{الحل}$$

$$f'(t) = (-3\sin t,\ 3\cos t,\ 3)$$

$$|f'(t)| = \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + 9} = \sqrt{9(\sin^2 t + \cos^2 t) + 9}$$

$$= \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow s(t) = \int_0^t (3\sqrt{2})\, d\tau = 3\sqrt{2}\, \tau \Big|_0^t = 3\sqrt{2}\, t$$

$$s = 3\sqrt{2}\, t \Rightarrow t = \frac{s}{3\sqrt{2}}$$

$$\vec{T}(t) = \frac{f'(t)}{|f'(t)|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t,\ \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\vec{T}(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{s}{3\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{s}{3\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

نبدل كل t في $\vec{T}(t)$ بـ $\frac{s}{3\sqrt{2}}$

$$\vec{N} = \frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|} =$$

$$T'(t) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t,\ \frac{-1}{\sqrt{2}}\sin t,\ 0 \right)$$

$$|T'(t)| = \sqrt{\frac{1}{2}\cos^2 t + \frac{1}{2}\sin^2 t + 0} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \vec{N} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t,\ 0 \right)$$

$\sqrt{2} \leftarrow$

$$= (-\cos t,\ -\sin t,\ 0)$$

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t & \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

قانون لنصف قطر التقوس دون حساب K

$$\boxed{\frac{1}{ص} = \frac{|T'(t)|}{S'(t)}}$$

$$|T'(t)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$S'(t) = 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{ص} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{6} \Rightarrow ص = 6$$

تمرين لتكن الدالة المتجهة:

$$R(t) = (1 + a\cos t)\vec{i} + (1 + a\sin t)\vec{j} \quad ; \quad 0 \le t \le 2\pi$$

أوجد المحل الهندسي للدالة ؟

الحل:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 + a\cos t \\ y = 1 + a\sin t \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \cos t = \frac{x-1}{a} \\ \sin t = \frac{y-1}{a} \end{array}$$

نعلم أن:

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{(y-1)^2}{a^2} = 1 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = a^2$$

دائرة مركزها (1,1) ونصف قطرها a

علاقات فرينيه في المنحني

يقصد بعلاقات فرينيه إعطاء كل من $\dot{\vec{T}}, \dot{\vec{N}}, \dot{\vec{B}}$ بدلالة $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ وتقوس والتفاف المنحني k, τ

$$\begin{bmatrix} \dot{\vec{T}} \\ \dot{\vec{N}} \\ \dot{\vec{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\vec{T}} = 0\vec{T} + k\vec{N} + 0\vec{B}$$
$$\dot{\vec{N}} = -k\vec{T} + 0\vec{N} + \tau\vec{B}$$
$$\dot{\vec{B}} = 0\vec{T} - \tau\vec{N} + 0\vec{B}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{\vec{T}} &= kN \\ \dot{N} &= -kT + \tau B \\ \dot{B} &= -\tau N \end{aligned}}$$

ملاحظة: (T, N, B) نعلم أن $B = T \times N$

ويكون $N = B \times T$.

وبالوسيط الطبيعي:

$$T = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$$

ونقبل $\vec{B} = \dfrac{\vec{r}' \times \vec{r}''}{|\vec{r}' \times \vec{r}''|}$

$$\Rightarrow N = \frac{\vec{r}' \times \vec{r}''}{|\vec{r}' \times \vec{r}''|} \times \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|}$$

بالطبيعي

تمرين: أوجد علاقات فرينيه والتقوس والالتفاف لمنحني اللولب الدائري:

$x = a\cos t \qquad y = a\sin t \qquad z = bt$

الحل: نكتب معادلة المنحني بدلالة الوسيط s حيث:

$$s = \int_0^t |\dot{r}(\tau)|\, d\tau = \int_0^t \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, d\tau = \int_0^t \sqrt{a^2\sin^2\tau + a^2\cos^2\tau + b^2}\, d\tau$$

$$= \int_0^t \sqrt{a^2(\sin^2\tau + \cos^2\tau) + b^2}\, d\tau = \int_0^t \sqrt{a^2+b^2}\, d\tau = \sqrt{a^2+b^2}\, t$$

نفرض $c = \sqrt{a^2+b^2}$ نجد

$s = ct$

$\Rightarrow t = \frac{s}{c}$

$$\Rightarrow r(s) = \left(a\cos\frac{s}{c},\ a\sin\frac{s}{c},\ \frac{b}{c}s\right)$$

لدينا:

$$T = \dot{r}(s) = \left(-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c},\ \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c},\ \frac{b}{c}\right)$$

$$\dot{T} = \left(-\frac{a}{c^2}\cos\frac{s}{c},\ -\frac{a}{c^2}\sin\frac{s}{c},\ 0\right)$$

$$\Rightarrow k = |\ddot{r}(s)| = |\dot{T}| = \frac{a}{c^2}$$

ونعلم أن

$\dot{T} = kN$ (معلوم ← $\dot{T}$ ، k ← معلوم)

$$\Rightarrow N = \frac{1}{k}\dot{T} = \left(-\cos\frac{s}{c},\ -\sin\frac{s}{c},\ 0\right)$$

$$\Rightarrow \dot{N} = \left(\frac{1}{c}\sin\frac{s}{c},\ -\frac{1}{c}\cos\frac{s}{c},\ 0\right)$$

لنوجد $\vec{B}$:

$$B = T \times N = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c} & \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c} & \frac{b}{c} \\ -\cos\frac{s}{c} & -\sin\frac{s}{c} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \left(\frac{b}{c}\sin\frac{s}{c}, -\frac{b}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{a}{c}\right)$$

$$\Rightarrow \dot{B} = \left(\frac{b}{c^2}\cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c^2}\sin\frac{s}{c}, 0\right)$$

ومن العلاقة $\dot{B} = -\tau N$ لنحاول ايجاد τ (معلوم، معلوم)

$$\Rightarrow \dot{B} = \frac{b}{c^2}\left(\cos\frac{s}{c}, \sin\frac{s}{c}, 0\right)$$

$$\Rightarrow \dot{B} = \frac{-b}{c^2}\left(-\cos\frac{s}{c}, -\sin\frac{s}{c}, 0\right) \Rightarrow \dot{B} = \frac{-b}{c^2} N$$

وبالمقارنة مع $\dot{B} = -\tau N$

$$\Rightarrow \tau = \frac{b}{c^2}$$

ملاحظة : لاحظ أن

$$K = \frac{a}{a^2+b^2} = Const$$

$$\tau = \frac{b}{a^2+b^2} = Const$$

أي التقوس والالتفاف ثابتان لأي نقطة من نقاط اللولب الدائري وهذا مايميزه وكل منحني يحقق هذه الخاصة هو لولب.

- أي يمكن للتقوس والالتفاف أن يعينا المنحني ، لذا سنسميهما المعادلات الذاتية.

تمرين أوجد ثلاثية فرينيه ترديو، للمنحني

$r(t) = (1+t^2, t, t^3)$ $\quad T, N, B$

وأوجد تقوسه والتفافه.

الحل:

$$r' = (2t, 1, 3t^2)$$
$$r'' = (2, 0, 6t)$$
$$r''' = (0, 0, 6.)$$

$$K = \frac{|r' \times r''|}{|r'|^3} = \frac{\left(\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2t & 1 & 3t^2 \\ 2 & 0 & 6t \end{vmatrix} \right)^{\frac{1}{2}}}{|r'|^3} = \frac{\sqrt{(36t^2+36t^4+4)}}{(4t^2+1+9t^4)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\tau = \frac{|(r', r'', r''')|}{|r' \times r''|^2} = \frac{-12}{36t^2+36t^4+4}$$

$$T = \frac{r'}{|r'|} = \frac{(2t, 1, 3t^3)}{\sqrt{4t^2+9t^4+1}}$$

$$B = \frac{r' \times r''}{|r' \times r''|} = \frac{(6t, -6t^2, -2)}{(36t^2+36t^4+4)^{\frac{1}{2}}}$$

$$N = B \times T = \frac{(-18t^4+2, -4t-18t^3, 12t^3)}{(4t^2+1+9t^4)^{\frac{1}{2}}(36t^2+36t^4+4)^{\frac{1}{2}}}$$

تمرين بين أن المنحني $r(t) = (t, 1+t^{-1}, t^{-1}-t)$ حيث $t>0$ هو منحني سوي

الحل: الشرط اللازم والكافي حتى يكون المنحني النظامي هو منحني سوي هو أن يكون التفاف المنحني معدوم في جميع نقاطه.

$$\tau = \frac{|(r', r'', r''')|}{|r' \times r''|^2}$$

$r' = (1, -t^{-2}, -t^{-2} - 1)$, $r'' = (0, 2t^{-3}, 2t^{-3})$

$$r''' = (0, -6t^{-4}, -6t^{-4})$$

$$r'' \times r''' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2t^{-3} & 2t^{-3} \\ 0 & -6t^{-4} & -6t^{-4} \end{vmatrix}$$

واضح أن $r'' \times r''' = 0$

$$= \vec{i}(-12t^{-7} + 12t^{-7}) + 0 + 0 = 0$$

وبما أن $r'' \times r''' = 0$ فإن:

$$(r', r'', r''') = 0$$

وبالتالي فإن $r(t)$ هو منحني سوي شرط أن يكون $r' \times r'' \neq 0$

المعادلات الذاتية "المميزة" لمنحني

- نسمي المعادلتين $k = k(s)$ ، $\tau = \tau(s)$ المعادلتين الذاتيتين للمنحني "الوسيط s حصراً"

سؤال دورة معياري للماجستير قبل أن تم إلغاء المعياري

- ملاحظة:
- المعادلتين الذاتيتين للمستقيم: $k = 0$ ، $\tau = 0$

($k = 0$ ← تقوس المستقيم صفر) ($\tau = 0$ ← لأنه موجود في مستوي)

- المعادلتين الذاتيتين للمنحني السوي: $k = k$ ، $\tau = 0$

($k = k$ ← ثابتة)

- المعادلتين الذاتيتين للولب دائري:

$$k = \frac{a}{a^2+b^2} = Const \qquad \tau = \frac{b}{a^2+b^2} = Const$$

تمرين: أوجد المعادلات الذاتية للمنحني

$$r(t) = \left(t, a\,ch\frac{t}{a}\right)$$

الحل: واضح أن $\tau = 0$ لأن هذا المنحني سوي

لحساب k:

لأنه سوي

$$k = \frac{|x'y'' - x''y'|}{|x'^2 + y'^2|^{\frac{3}{2}}}$$

$$x = t \Rightarrow x' = 1 \qquad x'' = 0$$

$$y = a\,ch\frac{t}{a} \Rightarrow y' = sh\frac{t}{a} \qquad y'' = \frac{1}{a}ch\frac{t}{a}$$

$$k = \frac{\left|\frac{1}{a}ch\frac{t}{a} - 0\right|}{\left|\underbrace{1 + sh^2\frac{t}{a}}_{ch^2\frac{t}{a}}\right|^{\frac{3}{2}}}$$

$$ch^2x - sh^2x = 1$$
$$\Rightarrow ch^2x = 1 + sh^2x$$

$$\Rightarrow k = \frac{\frac{1}{a}ch\frac{t}{a}}{\left(\sqrt{ch^2\frac{t}{a}}\right)^3} = \frac{\frac{1}{a}ch\frac{t}{a}}{\left(ch\frac{t}{a}\right)^3} = \frac{1}{a\,ch^2\frac{t}{a}}$$

- ولنكتب k بدلالة الوسيط s:

$$s = \int_0^t |r'(\tau)|\,d\tau = \int_0^t \sqrt{1 + sh^2\frac{\tau}{a}}\,d\tau = \int_0^t ch\frac{\tau}{a}\,dt =$$

$$r' = \left(1, sh\frac{t}{a}\right)$$

20

$$= a\,sh\frac{\tau}{a}\Big|_0^t = a\,sh\frac{t}{a}$$

$$\Rightarrow s = a\,sh\frac{t}{a}$$

"نرید $ch^2\frac{t}{a}$ بدلالة s"

$$s^2 = a^2\,sh^2\frac{t}{a} \Rightarrow s^2 = a^2\left(ch^2\frac{t}{a} - 1\right)$$

$$\Rightarrow s^2 = a^2 ch^2\frac{t}{a} - a^2$$

$$\Rightarrow ch^2\frac{t}{a} = \frac{s^2+a^2}{a^2}.$$

$$\Rightarrow k(s) = \frac{1}{a\left(\frac{s^2+a^2}{a^2}\right)} = \frac{a}{s^2+a^2}$$

أي إن المعادلات الذاتية هي:

$$k(s) = \frac{a}{s^2+a^2}$$

$$\tau = 0$$

تمارين

تمرين أوجد متجه المماس والمستقيم المماس للمنحني المعطى بالمعادلة:

$$r(t) = e^t \cos t\ \vec{i} + e^t \sin t\ \vec{j}\ ;\ t \geq 0$$

في النقطة الموافقة للقيمة $t = \frac{\pi}{4}$

الحل: "انتبه متجه المماس هو المطلوب وليس متجه وحدة المماس $\frac{r'(t)}{|r'(t)|}$"

$r'(t)$

$$r'(t) = \left(e^t \cos t - e^t \sin t\right)\vec{i} + \left(e^t \sin t + e^t \cos t\right)\vec{j}$$

$$= e^t\left[(\cos t - \sin t)\vec{i} + (\sin t + \cos t)\vec{j}\right]$$

$$r'(t) = e^{\frac{\pi}{4}}\left[\left(\frac{1}{\sqrt2} - \frac{1}{\sqrt2}\right)\vec{i} + \left(\frac{1}{\sqrt2} + \frac{1}{\sqrt2}\right)\vec{j}\right]_{t=\frac{\pi}{4}}$$ عمسا

$$\Rightarrow r\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left[\frac{2}{\sqrt{2}} j\right] e^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}} j$$

المستقيم المماس :

تمييزاً لها عن $r(t)$ غيرنا رمز قانون المستقيم المماس

$$R(t) = r(t_0) + \lambda r'(t_0)$$

حيث

$$r(t_0) = e^{\frac{\pi}{4}} \cos\frac{\pi}{4}\, i + e^{\frac{\pi}{4}} \sin\frac{\pi}{4}\, j$$

$$= e^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} i + \frac{1}{\sqrt{2}} j\right) = e^{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (i+j)$$

$$r'(t_0) = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}} j$$

$$\Rightarrow R(t) = \frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} (i+j) + \lambda \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}} j$$

$$= \frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} i + \frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} j + \lambda \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}} j$$

$$= \frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} i + \frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} (1+2\lambda) j = \frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \left[i + (1+2\lambda) j\right]$$

تمرين | لتكن الدالة المتجهة :

$$R(t) = r(\cos t\, i + \sin t\, j)$$

$0 \le t \le 2\pi$ أوجد $s(t)$ وأوجد $R(s)$

الحل :

$R'(t) = r(-\sin t\, i + \cos t\, j)$ متجه المماس

$$|R'(t)| = r\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = r$$

$\sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t}$

$$\Rightarrow s(t) = \int_0^t |R'(\tau)|\, d\tau = \int_0^t r\, d\tau = rt$$

$$\Rightarrow s = rt \Rightarrow t = \frac{s}{r}$$

للحصول على $R(s)$ نبدل كل t بـ $\frac{s}{r}$:

$$R(s) = r\left(\cos\left(\frac{s}{r}\right) i + \sin\left(\frac{s}{r}\right) j\right)$$

حيث $0 \le \frac{s}{r} \le 2\pi \Leftarrow 0 \le s \le 2\pi r$

س | أوجد طول مقوس المنحني

$$R(t) = e^{t}(\cos t\, i + \sin t\, j)$$

واكتب $R(s)$

الحل:

$$R'(t) = e^{t}(\cos t - \sin t)\, i + e^{t}(\sin t + \cos t)\, j$$

$$|R'(t)| = e^{t}\sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2}$$

$$= e^{t}\sqrt{\cos^2 t - 2\cos t \sin t + \sin^2 t + \sin^2 t + 2\cos t \sin t + \cos^2 t}$$

$$= e^{t}\sqrt{1+1} = \sqrt{2}\, e^{t}$$

$$S = \int_0^{\pi} \sqrt{2}\, e^{t}\, dt = \sqrt{2}\, e^{t}\Big|_0^{\pi} = \sqrt{2}(e^{\pi} - 1)$$

لنجد $s(t)$:

$$s(t) = \int_0^{t} \sqrt{2}\, e^{\tau}\, d\tau = \sqrt{2}\, e^{\tau}\Big|_0^{t}$$

$$= \sqrt{2}(e^{t} - 1)$$

$$\Rightarrow s = \sqrt{2}(e^{t} - 1)$$

$$\Rightarrow e^{t} = \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{s}{\sqrt{2}} + 1 \Rightarrow t = \ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)$$

$$R(s) = e^{\ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}}+1\right)} \cdot \left[\cos\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}}+1\right)\right) i + \sin\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}}+1\right)\right)\right].$$

$$\Rightarrow R(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{2}}+1\right)\left[\cos\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}}+1\right)\right) i + \sin\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}}+1\right)\right)\right]$$

ملاحظة

مركز التقوس: | مركز التقوس لمنحني نصف قطر تقوسه ρ في نقطة M منه هو المركز M_0 للدائرة المماسة للمنحني C في M ومرتبة تماسها تساوي 2 ونصف قطرها يساوي $|\rho|$

يتعين مركز التقوس من العلاقة :

$$MM_0 = |\rho| N$$

أو :

$$R_0 = R + |\rho| N$$

$$r^{*} = r(t) + \frac{1}{k} N$$

أو بعض المراجع

23

تمرين: أوجد تقوس والتفاف المنحني المعطى بالدالة المتجهة:

$$r(t) = (a\cos t, a\sin t, a\cos 2t)$$

الحل:

$$r'(t) = (-a\sin t, a\cos t, -2a\sin 2t)$$

$$r''(t) = (-a\cos t, -a\sin t, -4a\cos 2t)$$

$$r'''(t) = (a\sin t, -a\cos t, 8a\sin 2t)$$

بالحساب نجد:

$$r' \times r'' = a^2\sqrt{5+12\cos^2 2t}$$

$$|r'| = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + 4a^2\sin^2 2t} = \sqrt{a^2+4a^2\sin^2 2t}$$

$$\Rightarrow k = \frac{|r' \times r''|}{|r'|^3} = \frac{a^2\sqrt{5+12\cos^2 2t}}{(a\sqrt{1+4\sin^2 2t})^3} = \frac{\sqrt{5+12\cos^2 2t}}{a(1+4\sin^2 2t)^{\frac{3}{2}}}$$

لحساب الالتفاف:

$$(r', r'', r''') = \begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & -2a\sin 2t \\ -a\cos t & -a\sin t & -4a\cos 2t \\ a\sin t & -a\cos t. & 8a\sin 2t \end{vmatrix}$$

$$= 6a^3\sin 2t$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{(r', r'', r''')}{(r' \times r'')^2} = \frac{6a^3\sin 2t}{a^4(5+12\cos^2 2t)} = $$

$$= \frac{6\sin 2t}{a(5+12\cos^2 2t)}$$

مفهوم درجة التماس :

L_1 و L_2 منحنيان أملسان ماران من نقطة M_0 لهما مماس مشترك M_0T

نأخذ على الخط M_0T نقطة P قريبة من M_0، ونمرر من P مستوٍ Π يعامد الخط M_0T ويقطع المنحنيين L_1 و L_2 في M_1 و M_2 على الترتيب

نرمز بـ l لطول القطعة M_0P و h طول القطعة M_1M_2

نقول إن درجة تلامس المنحنيين L_1 و L_2 في M_0 تساوي $q\in\mathbb{N}$ إذا كانت:

$$\lim_{l\to 0}\frac{h}{l^q}=0$$

وكانت النهاية $\lim_{l\to 0}\frac{h}{l^{q+1}}\neq 0$ أو غير موجودة.

- وإذا كانت النهاية $\lim_{l\to 0}\frac{h}{l^q}$ موجودة لأجل أي قيمة $q\in\mathbb{N}$

عندئذٍ نقول إن للمنحنيين L_1 و L_2 في M_0 درجة تلامس غير محدودة.

L_2 L_1 h M_2 M_1 l P M_0 Π

مبرهنة هامة للعملي

- لتكن $r_1\in C^n$ ، $r_2\in C^n$ الدالتين المتجهتين للمنحنيين L_1 و L_2 في جوار نقطة البدء 0.

فإذا كان:

$$r_1'(0)=r_2'(0),\ \dots\ ,r_1^{q}(0)=r_2^{q}(0)$$

وكان :

$$r_1^{q+1}(0)\neq r_2^{q+1}(0)$$

فإن للمنحنيين L_1 و L_2 في النقطة M_0 درجة تماس من المرتبة q.

- ملاحظة | إذا كانت كل من الدالتين المتجهتين r_1 و r_2 تنتمي إلى C^∞ في جوار ما للنقطة 0

ولأجل أي عدد q تتحقق العلاقة:

$$r_1'(0)=r_2'(0),\ \dots\ ,\ r_1^{q}(0)=r_2^{q}(0)$$

فإن للمنحنيين L_1 و L_2 في النقطة M_0 مرتبة تماس لانهائية.

دائرة التلامس ليكن L منحني نظامي في جوار نقطة M_0، لنأخذ جميع الدوائر التي تمس المنحني L في M_0. نسمي الدائرة من بين تلك الدوائر التي درجة تماسها للخط L لا تقل عن اثنين بالدائرة المماسة.

- **مركز ونصف قطر دائرة التماس** لتكن دائرة تماس منحني $\vec{r}(t)$

نصف قطر دائرة التماس:

$$R = \frac{1}{K(M_0)}$$

$K(M_0)$ ← تقوس المنحني $\vec{r}(t)$ في النقطة M_0

مركزها:

$$\vec{r}_* = \vec{r}(t_0) + \frac{1}{K(M_0)} \vec{N}$$

$\vec{r}_*$ ← متجه احداثيات المركز

$\vec{r}(t_0)$ ← متجه الموضع في M_0

مثال 1: أوجد درجة تماس المنحنيين المعينين بالتالي:

$$y_1 = x^2 \qquad y_2 = 3x^2$$

الحل: حسب المبرهنة.

أولاً: نوجد نقطة التماس: نجعل $y_1 = y_2 \Leftarrow x = 0 \Leftarrow y = 0$

نقطة التماس $(0,0)$

$$y_1' = 2x \Rightarrow y_1'\Big|_{(0,0)} = 0 \qquad y_2' = 6x \Rightarrow y_2'\Big|_{(0,0)} = 0$$

$$\Rightarrow y_1'\Big|_{(0,0)} = y_2'\Big|_{(0,0)}$$

$$y_1'' = 2 \Rightarrow y_1''\Big|_{(0,0)} = 2 \neq y_2''\Big|_{(0,0)} = 6 \Leftarrow y_2'' = 6$$

وبالتالي درجة التماس = 1.

مثال 2 بفرض L_1 محور السينات و L_2 منحني معطى وسيطياً بالمعادلات:

$$x = t \qquad y = t^3 \qquad z = t^4$$

أوجد درجة تلامس المنحنيين L_1 و L_2 في النقطة $(0,0)$.

الحل:

$$r_1 = (x, 0, 0) \qquad r_2 = (t, t^3, t^4)$$

$$r_1' = (1,0,0) \qquad r_2' = (1, 3t^2, 4t^3)$$

$$r_1'\Big|_{t=0} = (1,0,0) \quad = \quad r_2'\Big|_{t=0} = (1,0,0)$$

$$r_1'' = (0,0,0) \qquad r_2'' = (0, 6t, 12t^2)$$

$$r_1''\Big|_{t=0} = (0,0,0) \quad = \quad r_2''\Big|_{t=0} = (0,0,0)$$

$$r_1''' = (0,0,0) \qquad r_2''' = (0, 6, 24t)$$

$$r_1'''\Big|_{t=0} = (0,0,0) \quad \neq \quad r_2'''\Big|_{t=0} = (0,6,0)$$

وبالتالي درجة التماس 2

مثال 3 ليكن L_1 محور السينات و L_2 منحني الدالة :

$$y_2 = f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

أوجد ~~نقطة~~ درجة التماس

الحل : للمنحنيين ~~نقطة تماس~~ درجة تماس لا نهائية في نقطة التماس التي هي مبدأ الاحداثيات .

$$L_1 : y_1 = 0 \qquad , \qquad L_2 : y_2$$

نلاحظ أن كل من y_1 و y_2 دالتين من C^∞

وكذلك

$$0 = y_1'(0,0) = y_2'(0,0) \; \ldots\ldots$$

أي ان درجة التماس لا نهائية

ممكن نأخذها

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{|x|}} = 0$$

أو صور أخذ مشتقاته وعوضنا

النواشر يوجد عدد لا نهائي من النواشر لمنحنٍ معطى L حيث يوجد ناشر من أجل كل عدد ثابت C

ومعادلة هذه النواشر هي:

$$r^* = r + (C - s)T$$

المناشير "في حالة المنحني المستوي"

إذا اعتبرنا أن $r = (x(t), y(t))$ فإن المعادلات الوسيطية للمنشور تعطى بالعلاقتين:

$$x^*(t) = x - y' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}$$

$$y^*(t) = y + x' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}$$

مثال 1 أوجد النواشر

$$r(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$$

وجدنا أن: $s = \sqrt{a^2+b^2}\, t = ct$

~~T(t) = (−a/c sin s/c, a/c ...)~~

$$T(t) = \left(-\frac{a}{c}\sin t, \frac{a}{c}\cos t, \frac{b}{c}\right)$$

معادلة النواشر:

$$r^* = r + (c_1 - s)T =$$

لنميزها عن c سابق

$$(a\cos t, a\sin t, bt) + \left(-\frac{a(c_1 - s)}{c}\sin t, \frac{a(c_1 - s)}{c}\cos t, \frac{b(c_1 - s)}{c}\right)$$

$$\Rightarrow r^* = \left(a\cos t - \frac{a(c_1 - s)}{c}\sin t, a\sin t + \frac{a(c_1 - s)}{c}\cos t, bt + \frac{b(c_1 - s)}{c}\right)$$

حيث نبدل كل s بـ ct

$$r^* = \left(a\cos t - \frac{a(c_1 - ct)}{c}\sin t, a\sin t + \frac{a(c_1 - ct)}{c}\cos t, bt + \frac{b(c_1 - ct)}{c}\right)$$

2) لنأخذ الدائرة التي معادلتها $x = a\cos t \quad y = a\sin t$
حيث a نصف قطرها
لنوجد معادلة ناشر هذه الدائرة.

$$r(t) = (a\cos t,\ a\sin t, 0)$$

$$r'(t) = (-a\sin t,\ a\cos t, 0)$$

$$|r'(t)| = a$$

$$T = \frac{r'(t)}{|r'(t)|} = (-\sin t, \cos t, 0)$$

$$S(t) = at$$

معادلة الناشر:

$$r^* = r + (c - s)T$$

$$r^*(t) = (a\cos t \mp (c - at)\sin t,\ a\sin t + (c - at)\cos t, 0)$$

مثال 3) أوجد معادلة ناشر القطع الناقص:

$$x = a\cos t \qquad y = b\sin t$$

الحل:

$$S = \int_0^t \sqrt{a^2\cos^2\tau + b^2\sin^2\tau}\ d\tau = \sqrt{a^2+b^2}\,\tau \Big|_0^t = \sqrt{a^2+b^2}\ t = ct$$

$$r(t) = (a\cos t, b\sin t, 0)$$

$$r'(t) = (-a\sin t, b\cos t, 0) \quad ; \quad |r'(t)| = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$T = \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t, 0\right) = \left(-\frac{a}{c}\sin t, \frac{b}{c}\cos t, 0\right)$$

$$S^* = r + (c_1 - s)T$$

$$= (a\cos t, b\sin t, 0) + (c_1 - ct)\left(-\frac{a}{c}\sin t, \frac{b}{c}\cos t, 0\right)$$

$$= \left(a\cos t \mp (c_1 - ct)\frac{a}{c}\sin t,\ b\sin t + (c_1 - ct)\frac{b}{c}\cos t, 0\right)$$

ملاحظة: يمكن كتابة الناشر بالشكل الوسيطي:

$$x = a\cos t - (c_1 - ct)\frac{a}{c}\sin t$$

$$y = b\sin t + (c_1 - ct)\frac{b}{c}\cos t$$

مثال 4 أوجد منشور القطع الناقص $x = a\cos t \quad y = b\sin t$ وأوجد نصف قطر تقوسه.

الحل:

$x' = -a\sin t \qquad y' = b\cos t$

$x'' = -a\cos t \qquad y'' = -b\sin t$

$$x^* = x - y'\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}$$

$x'^2 + y'^2 \to a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t$

$x'y'' - y'x'' \to ab\sin^2 t + ab\cos^2 t = ab$

$$= a\cos t - (b\cos t)\frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab}$$

$$\Rightarrow x^* = a\cos t - \frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{a}\cos t$$

$$y^* = y + x'\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}$$

$$= b\sin t + (-a\sin t)\frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab}$$

$$\Rightarrow y^* = b\sin t - \frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{b}\sin t$$

$$\rho = \frac{1}{K} \quad : K = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{ab}$$

مثال 5 إن مركز تقوس الدائرة يقع في مركزها لذلك فإن منشور الدائرة هو نقطة هي مركز الدائرة.

الإثبات: لنأخذ الدائرة: $r=(a\cos t, a\sin t, 0)$

نعلم أن $k=\frac{1}{a}$ وضوحاً وتم إيجاده سابقاً $\Leftarrow \frac{1}{k}=a$

معادلة منحنى موضع مركز التقوس والتي تسمى المنشور، طالما المنحنى سوي، هي:

$$\vec{OC} \text{ أو } \leftarrow r^{*}=r(t)+\frac{1}{k}N$$

إيجاد N:

$$\vec{B}=\frac{r' \times r''}{|r' \times r''|}$$

$$r'=(-a\sin t, a\cos t, 0)$$

$$r''=(-a\cos t, -a\sin t, 0)$$

$$r' \times r''=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\sin t & a\cos t & 0 \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix}=(0,0,a^2)$$

$$|r' \times r''|=\sqrt{0+0+a^4}=a^2$$

$$\Rightarrow \vec{B}=(0,0,1)$$

$$T=\frac{r'}{|r'|}=(-\sin t, \cos t, 0)$$

$$\vec{N}=\vec{B}\times\vec{T}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin t & \cos t & 0 \end{vmatrix}=-\cos t\, i-\sin t\, j=(-\cos t, -\sin t, 0)$$

$$r^{*}=(a\cos t, a\sin t, 0)+a(-\cos t, -\sin t, 0)$$
$$=(a\cos t-a\cos t, a\sin t-a\sin t, 0)=(0,0,0)$$

$\vec{OC}=0$ وبالتالي مركز التقوس هو مركز الدائرة ذاته

وبالتالي معادلة المنشور تؤول إلى نقطة هي مركز الدائرة.

تمرين إضافي | أوجد مركز تقوس اللولب الدائري

$$\vec{r} = (a\cos t, a\sin t, bt)$$

الحل: سبق وأوجدنا

$$k = \frac{a}{a^2+b^2}$$

* لإيجاد مركز التقوس:

$$\vec{OC} = \vec{r}(t) + \frac{1}{k}\vec{N}$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{r}' \times \vec{r}''}{|\vec{r}' \times \vec{r}''|} = \frac{(ab\sin t, -ab\cos t, a^2)}{a\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b\sin t, -b\cos t, a)$$

$$\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{vmatrix} i & j & k \\ b\sin t & -b\cos t & a \\ -a\sin t & a\cos t & b \end{vmatrix}$$

نبدل في * فنحصل على $\vec{OC}$.

تمرين | هل هناك تلامس بين بياني الدالتين في الحالات الآتية ومن أي مرتبة هذا التلامس إن وجد:

① . $f_1(x) = 0$ $\qquad f_2(x) = x^2$

L_1 بيان f_1 هو المحور ox

L_2 بيان f_2 هو القطع المكافئ $y = x^2$

إن $(0,0)$ هي النقطة المشتركة الوحيدة بين L_1, L_2 حيث
$f_1(0) = f_2(0) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f_1'(x) = 0 \Rightarrow f_1'(0) = 0 \\ f_2'(x) = 2x \Rightarrow f_2'(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f_1'(0) = f_2'(0)$$

$$\left.\begin{array}{l} f_1''(x) = 0 \Rightarrow f_1''(0) = 0 \\ f_2''(x) = 2 \Rightarrow f_2''(0) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow f_1''(0) \neq f_2''(0)$$

وبالتالي لـ L_1, L_2 تلامس من الدرجة الأولى عند O

② $f_1(x)=0$ $\quad f_2(x)=x^4$

النقطة المشتركة $(0,0)$

$f_1(0)=f_2(0)=0$

$$\left.\begin{array}{l} f_1'(0)=0 \\ f_2'(x)=4x^3 \Rightarrow f_2'(0)=0 \end{array}\right\} f_1'(0)=f_2'(0)$$

$$\left.\begin{array}{l} f_1''(x)=0 \Rightarrow f_1''(0)=0 \\ f_2''(x)=12x^2 \Rightarrow f_2''(0)=0 \end{array}\right\} f_1''(0)=f_2''(0)$$

$$\left.\begin{array}{l} f_1'''(x)=0 \Rightarrow f_1'''(0)=0 \\ f_2'''(x)=24x \Rightarrow f_2'''(0)=0 \end{array}\right\} f_1'''(0)=f_2'''(0)$$

$$\left.\begin{array}{l} f_1^{(4)}(x)=0 \Rightarrow f_1^{(4)}(0)=0 \\ f_2^{(4)}(x)=24 \Rightarrow f_2^{(4)}(0)=24 \end{array}\right\} f_1^{(4)}(0) \neq f_2^{(4)}(0)$$

وبالتالي التلامس بين L_1 , L_2 عند المبدأ من الدرجة الثالثة.

تمرين ١ أوجد تمثيلاً وسيطياً لاجوي جذور للمنحني الناتج عن تقاطع الاسطوانة

$$x^2+y^2=1$$

والمستوي

$$x+y+z=1$$

الحل: إذا أخذنا $x=t$ فسيكون: $t^2+y^2=1 \Leftarrow y=\sqrt{1-t^2}$

ويكون

$$z=1-t-\sqrt{1-t^2}$$

ولكن هذا التمثيل يحوي جذور. لنبحث عن تمثيل آخر

لنأخذ $x=\cos t$, $y=\sin t \Leftarrow$ تحقق $x^2+y^2=1$

$$y^2=1-x^2 \Rightarrow y=\sqrt{1-\cos^2 t}=\sqrt{\sin^2 t}=\sin t$$

ويكون

$$z=1-(\sin t+\cos t)$$

وبالتالي يصبح التمثيل الوسيطي:

$$\vec{r}(t): \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 1 - (\cos t + \sin t) \end{cases}$$

وهذا التمثيل لا يحوي جذور فهو مقبول.

تمرين ١ أوجد طول قوس المنحني:

$$\vec{r}(t) = (3ch2t, 3sh2t, 6t) \qquad 0 \leq t \leq \pi$$

الحل:

$$S = \int_0^{\pi} |\acute{r}(\tau)| d\tau$$

$$\acute{r}(t) = (6sh2t, 6ch2t, 6)$$

$$|\acute{r}(t)| = 6\sqrt{sh^2 2t + ch^2 2t + 1} = 6\sqrt{ch4t + 1} = 6\sqrt{2ch^2 2t}$$

$$= 6\sqrt{2}\ ch2t$$

حيث $ch2t = ch^2t + sh^2t$

حيث $ch^2t = \frac{ch2t + 1}{2}$

$$\Rightarrow S = 6\sqrt{2}\int_0^{\pi} ch2\tau\, d\tau = 6\sqrt{2}\left[\frac{1}{2} sh2\tau\right]_0^{\pi} = 3\sqrt{2}(sh2\pi - sh0)$$

$$= 3\sqrt{2}\, sh(2\pi)$$

$sh0 = 0$
$ch0 = 1$

تمرين ٢ أوجد تمثيلاً طبيعياً للمنحني:

$$\vec{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t) \qquad -\infty < t < +\infty$$

الحل:

الوسيط الطبيعي:

$$S(t) = \int_0^{t} |\acute{r}(\tau)| d\tau$$

$$\acute{r}(t) = [e^t \cos t - e^t \sin t,\ e^t \sin t + e^t \cos t,\ e^t]$$

$$\acute{r}(t) = (e^t(\cos t - \sin t),\ e^t(\sin t + \cos t),\ e^t)$$

$$|r'(t)| = \sqrt{e^{2t}\left[(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2 + 1\right]}$$

$$\Rightarrow |r'(t)| = e^{t}\sqrt{\cos^2 t - 2\sin t\cos t + \sin^2 t + \sin^2 t + 2\cos t\sin t + \cos^2 t + 1}$$

$$\Rightarrow |r'(t)| = \sqrt{3}\, e^{t}$$

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{3}\, e^{\tau}\, d\tau = \sqrt{3}\left(e^{\tau}\Big|_0^t\right) = \sqrt{3}\,(e^{t} - 1)$$

$$\Rightarrow \frac{s}{\sqrt{3}} = e^{t} - 1 \Rightarrow \frac{s}{\sqrt{3}} + 1 = e^{t} \Rightarrow t = \ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right)$$

فيكون التمثيل الطبيعي هو:

$$\vec{r}(s): \begin{cases} x(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right)\cos \ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right) \\ y(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right)\sin \ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right) \\ z(s) = \frac{s}{\sqrt{3}} + 1 \end{cases}$$

تمرين ليكن المنحني

$$\vec{r}: \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \\ z = 0 \end{cases}$$

أوجد طول قوس واحد حيث $0 \le t \le 2\pi$

الحل:

$$s = \int_0^{2\pi} |r'(\tau)|\, d\tau$$

$$r'(t) = \left(a(1 - \cos t),\ a\sin t,\ 0\right)$$

$$|r'(t)| = \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2\sin^2 t}$$

$$= a\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} = a\sqrt{2 - 2\cos t}$$

$$= a\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t} = a\sqrt{2}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}} = 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|$$

انتبه

ولكن عندنا $0 \le t \le 2\pi \Leftarrow 0 \le \frac{t}{2} \le \pi$

$\Leftarrow \sin\frac{t}{2} \ge 0$

$$\Rightarrow S = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{\tau}{2}\, d\tau = 2a\left[-2\cos\frac{\tau}{2}\right]_0^{2\pi}$$

محكمة عادي ← $\int_0^{2\pi} \sim 6$

$$= -4a(\cos\pi - \cos 0) = -4a(-1-1) = 8a$$

تمرين أثبت أن المتجهات المماسة للولب في نقاط مختلفة منه تقطع بزاوية ثابتة "محور oz".

الحل: إن الزاوية بين المتجهات المماسة للولب في نقاط مختلفة منه والمحور oz هي الزاوية بين $\vec{T}, \vec{k}$ (ولتكن α) حيث $\vec{k} = (0,0,1)$ "متجه الوحدة المحمول على oz"

لنوجد $\vec{T}$:

$$\vec{T} = \frac{\acute{r}(t)}{|\acute{r}(t)|}$$

$$\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt) \quad ; -\infty < t < +\infty$$

$$\acute{r}(t) = (-a\sin t, a\cos t, b) \qquad |\acute{r}(t)| = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin t, a\cos t, b)$$

$$\vec{T}\cdot\vec{k} = \underbrace{|\vec{T}|}_{1}\cdot\underbrace{|\vec{k}|}_{1}\cdot\cos\alpha = \cos\alpha$$

$$\vec{T}\cdot\vec{k} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left((-a\sin t)(0) + (a\cos t)(0) + (b)(1)\right) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha$$

ونلاحظ أن α لا تتعلق بـ t وبالتالي فهي ثابتة في جميع نقاط اللولب.

تمرين| أثبت أن المتجهات المماسة على طول المنحني:

$\vec{r}(t) = \left(\frac{2}{3}t, t^2, t^3\right)$

تصنع زاوية ثابتة مع المتجه $\vec{u}(1,0,1)$

الحل:

$$\vec{T} = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$$

$$\vec{r}'(t) = \left(\frac{2}{3}, 2t, 3t^2\right)$$

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{\frac{4}{9} + 4t^2 + 9t^4} = \sqrt{9\left(t^4 + \frac{4}{9}t^2 + \frac{4}{81}\right)}$$

$$= 3\sqrt{\left(t^2 + \frac{2}{9}\right)^2} = 3\left(t^2 + \frac{2}{9}\right) = 3t^2 + \frac{2}{3} = \frac{9t^2+2}{3}$$

$$\Rightarrow \vec{T} = \left(\frac{2}{3}, 2t, 3t^2\right) \cdot \frac{3}{9t^2+2}$$

$$\Rightarrow \vec{T} = \left(\frac{2}{9t^2+2}, \frac{6t}{9t^2+2}, \frac{9t^2}{9t^2+2}\right)$$

لتكن θ الزاوية بين المتجهين $\vec{t}, \vec{u}$ عندئذٍ:

$$\cos\theta = \frac{\vec{T} \cdot \vec{u}}{|\vec{T}| \cdot |\vec{u}|} \quad |\vec{T}| = 1, \quad |\vec{u}| = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$$

$$\vec{T} \cdot \vec{u} = \left(\frac{2}{9t^2+2}\right)(1) + \left(\frac{6t}{9t^2+2}\right)(0) + \left(\frac{9t^2}{9t^2+2}\right)(1)$$

$$= \frac{2}{9t^2+2} + \frac{9t^2}{9t^2+2} = \frac{9t^2+2}{9t^2+2} = 1.$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

ونلاحظ أن θ لا تتعلق بـ t وبالتالي هي ثابتة على طول المنحني

تمرين | أوجد في نقطة t من المنحني:

T, N, B

ثلاثية تريدر.

$$\vec{r}(t) = (3t - t^3,\ 3t^2,\ 3t + t^3)$$

الحل:

$$\vec{T} = \frac{\acute{r}(t)}{|\acute{r}(t)|} \qquad B = \frac{\acute{r} \times \ddot{r}}{|\acute{r} \times \ddot{r}|} \qquad \vec{N} = \vec{B} \times \vec{T}$$

$$\acute{r}(t) = (3 - 3t^2,\ 6t,\ 3 + 3t^2)$$

$$\ddot{r}(t) = (-6t,\ 6,\ 6t)$$

$$\vec{\acute{r}}(t) \times \vec{\ddot{r}}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3-3t^2 & 6t & 3+3t^2 \\ -6t & 6 & 6t \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \acute{r}(t) \times \ddot{r}(t) = 18\,(t^2 - 1,\ -2t,\ t^2 + 1)$$

$$|\acute{r}(t)| = 3\sqrt{(1-t^2)^2 + 4t^2 + (1+t^2)^2}$$

$$\Rightarrow |\acute{r}(t)| = 3\sqrt{1 - 2t^2 + t^4 + 4t^2 + 1 + 2t^2 + t^4}$$

$$\Rightarrow |\acute{r}(t)| = 3\sqrt{2t^4 + 4t^2 + 2} = 3\sqrt{2}\sqrt{t^4 + 2t^2 + 1}$$

$$\Rightarrow |\acute{r}(t)| = 3\sqrt{2}\sqrt{(t^2+1)^2} = 3\sqrt{2}\,(t^2 + 1)$$

$$|\acute{r}(t) \times \ddot{r}(t)| = 18\sqrt{(t^2-1)^2 + 4t^2 + (t^2+1)^2}$$

$$= 18\sqrt{2t^4 + 4t^2 + 2} = 18\sqrt{2}\,(t^2 + 1)$$

$$\Rightarrow \vec{T} = \left(\frac{1 - t^2}{\sqrt{2}\,(t^2+1)},\ \frac{2t}{\sqrt{2}\,(t^2+1)},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\vec{B} = \left(\frac{t^2 - 1}{\sqrt{2}\,(t^2+1)},\ \frac{-2t}{\sqrt{2}\,(t^2+1)},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1-t^2}{t^2+1} & \frac{2t}{t^2+1} & 1 \\ \frac{t^2-1}{t^2+1} & \frac{-2t}{t^2+1} & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{N} = \frac{1}{2}\left(\frac{4t}{t^2+1}, \frac{2(t^2-1)}{t^2+1}, 0\right) = \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1}, 0\right)$$

تمرين | أوجد تقوس كل من المنحنيات:

① $\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt) \qquad -\infty < t < +\infty$

ثابت $\quad k = \frac{a}{a^2+b^2} \quad$ سبق وأوجدناه

② $\vec{r}(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t), 0)$

$\acute{r}(t) = (a(1-\cos t), a\sin t, 0)$

$r''(t) = (a\sin t, a\cos t, 0)$

$$\acute{r} \times r'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a(1-\cos t) & a\sin t & 0 \\ a\sin t & a\cos t & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, a^2(\cos t - 1))$$

$|\acute{r}(t)| = \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin t} = \dots \quad 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|$

$|\acute{r} \times r''| = a^2(1-\cos t)$

$$\Rightarrow k = \frac{a^2(1-\cos t)}{8a^3\sin^2\frac{t}{2}\left|\sin\frac{t}{2}\right|} = \frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{8a\sin^2\frac{t}{2}\left|\sin\frac{t}{2}\right|}$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{4a\left|\sin\frac{t}{2}\right|}, \quad t \neq 2\pi k$$

③ $\vec{r}(t) = \left(a\left(\cos t + \ln tg\frac{t}{2}\right), a\sin t, 0\right)$; $0 < t < \pi$

$r'(t) = \left(a\left(-\sin t + \frac{1}{\sin t}\right), a\cos t, 0\right)$

$\frac{1}{\underbrace{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}_{\sin t}} = \frac{\frac{\frac{1}{2}}{\cos^2\frac{t}{2}}}{\frac{\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}}$

$r''(t) = \left(-a\cos t - \frac{a\cos t}{\sin^2 t}, -a\sin t, 0\right)$

$\Rightarrow r''(t) = \left(-a\cos t\left(1 + \frac{1}{\sin^2 t}\right), -a\sin t, 0\right)$

$r' \times r'' = (0, 0, a^2\sin^2 t - a^2 + a^2\cos^2 t + a^2 ctg^2 t)$

$\Rightarrow r' \times r'' = (0, 0, a^2 ctg^2 t)$

$|r'| = a\sqrt{\left(-\sin t + \frac{1}{\sin t}\right)^2 + \cos^2 t} =$

$= a\sqrt{\sin^2 t - 2 + \frac{1}{\sin^2 t} + \cos^2 t} = a\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} - 1} =$

$= a\sqrt{\frac{1 - \sin^2 t}{\sin^2 t}} = a\sqrt{\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}} = a\,|ctg\, t|$

$|r' \times r''| = a^2 ctg^2 t$

$k = \frac{a^2 ctg^2 t}{a^3 ctg^2 t\, |ctg\, t|} \Rightarrow k = \frac{1}{a\,|ctg\, t|}$

④ $\vec{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, t)$

$r'(t) = (1 - \cos t, \sin t, 1)$

$r''(t) = (\sin t, \cos t, 0)$

$$|\acute{r}(t)| = \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t + 1} = \sqrt{3 - 2\cos t}$$

$$\acute{r} \times \ddot{r} = (-\cos t, \sin t, \cos t - 1)$$

$$|\acute{r} \times \ddot{r}| = \sqrt{\cos^2 t - 2\cos t + 2}$$

$$\Rightarrow k = \frac{\sqrt{\cos^2 t - 2\cos t + 2}}{(3 - 2\cos t)^{\frac{3}{2}}}$$

تمرين / اوجد تقوس والتفاف كل من المنحنيات :

① $x = t$ $\quad y = t^2$ $\quad z = t^3$

$$k = \frac{|\acute{r} \times \ddot{r}|}{|\acute{r}|^3} \qquad \tau = \frac{(\acute{r}, \ddot{r}, \dddot{r})}{|\acute{r} \times \ddot{r}|^2}$$

$$\acute{r} = (1, 2t, 3t^2) \qquad \ddot{r} = (0, 2, 6t) \qquad \dddot{r} = (0, 0, 6)$$

$$|\acute{r}| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$$

$$|\acute{r} \times \ddot{r}| = \sqrt{36t^4 + 36t^2 + 4} = 2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}$$

$$(\acute{r}, \ddot{r}, \dddot{r}) = (\acute{r} \times \ddot{r}) \cdot \dddot{r} = 12$$

$$k = \frac{2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\tau = \frac{12}{36t^4 + 36t^2 + 4} = \frac{3}{9t^4 + 9t^2 + 1}$$

② $x = 3t - t^3$ $\quad y = 3t^2$ $\quad z = 3t + t^3$

$r'(t) = (3-3t^2, 6t, 3+3t^2)$

$r''(t) = (-6t, 6, 6t)$

$r'''(t) = (-6, 0, 6)$

$r' \times r'' = 18(t^2-1, 2t, t^2+1)$

$|r'(t)| = 3\sqrt{2}\,(t^2+1)$ $\qquad$ $|r' \times r''| = 18\sqrt{2}\,(t^2+1)$

$(r', r'', r''') = 18(-6t^2+6+6t^2+6) = 216$

$$k = \frac{18\sqrt{2}\,(t^2+1)}{27 \times 2\sqrt{2}\,(t^2+1)(t^2+1)^2} = \frac{1}{3(t^2+1)^2}$$

$$\tau = \frac{216}{(18)^2 \times 2(t^2+1)^2} = \frac{1}{3(t^2+1)^2}$$

(3) $x = t$ $\qquad$ $y = \dfrac{1+t}{t}$ $\qquad$ $z = \dfrac{1-t^2}{t}$

$r'(t) = \left(1, \dfrac{-1}{t^2}, -1-\dfrac{1}{t^2}\right)$

$r''(t) = \left(0, \dfrac{2}{t^2}, \dfrac{2}{t^2}\right)$ $\qquad$ $r'''(t) = \left(0, \dfrac{-6}{t^4}, \dfrac{-6}{t^4}\right)$

$r' \times r'' = \left(\dfrac{2}{t^3}, \dfrac{-2}{t^3}, \dfrac{2}{t^3}\right)$

$|r'(t)| = \dfrac{\sqrt{2}}{t^2}\sqrt{t^4+t^2+1}$

$|r' \times r''| = \dfrac{2\sqrt{3}}{|t^3|}$ $\quad , \quad$ $(r', r'', r''') = 0$

$$k = \frac{2\sqrt{3}}{|t^3|} \cdot \frac{t^6}{2\sqrt{2}\sqrt{(t^4+t^2+1)^3}} = \frac{\sqrt{3}\,t^3}{\sqrt{2}\sqrt{(t^4+t^2+1)^3}}$$

$T = 0$

(4) $x = a(t - \sin t)$ $\quad y = a(1 - \cos t)$ $\quad z = bt$

$$r' = (a(1-\cos t),\ a\sin t,\ b)$$

$$r'' = (a\sin t,\ a\cos t,\ 0)$$

$$r''' = (a\cos t,\ -a\sin t,\ 0)$$

$$r' \times r'' = (-ab\cos t,\ ab\sin t,\ a^2(\cos t - 1))$$

$$|r'| = \sqrt{4a^2\sin^2\frac{t}{2} + b^2}$$

$$|r' \times r''| = a\sqrt{4a^2\sin^4\frac{t}{2} + b^2}$$

$$(r', r'', r''') = -a^2 b$$

$$k = \frac{a\sqrt{4a^2\sin^4\frac{t}{2} + b^2}}{\left(4a^2\sin^2\frac{t}{2} + b^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\tau = \frac{-a^2 b}{a^2\left(4a^2\sin^4\frac{t}{2} + b^2\right)} = \frac{-b}{4a^2\sin^4\frac{t}{2} + b^2}$$

تمرين | أثبت أن المنحني المعطى بالدالة المتجهة $r(t) = (3t^2 - t, 0, 0)$ نظامي

الحل: $R'(t) = (3t^2 - 1, 0, 0) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$r(t) \in C^\infty \quad \forall t \in \mathbb{R}$ (قابلة للاشتقاق عدد لانهائي من المرات)

$\in$ $r(t)$ منحنٍ نظامي في جميع نقاطه

Scanned by CamScanner

تمرين: أثبت أن المنحني $r(t)=(t^3,0,0)$ ليس نظامياً في $(0,0,0)$

الحل: $r'(t)=(3t^2,0,0)$

عندما $t=0 \Leftarrow r'(t)=0 \Leftarrow r(t)$ ليس نظامياً في $(0,0,0)$

تمرين: أثبت أن المنحني المعرف بالمعادلة:

$$r(t)=\begin{cases}(t^2,t^2\sin\frac{1}{t}) & t\neq 0\\ 0 & t=0\end{cases} \quad -\infty<t<+\infty$$

ليس نظامياً.

مشتقه عندما $t=0$

الحل: واضح أن: $r'(t)=(0,0)\big|_{t=0} \Leftarrow r(t)$ ليس نظامي

تمرين: احسب طول قوس المنحني المعرف بالمعادلة:

$r(\theta)=ae^{k\theta}$ ← إحداثيات قطبية

بين النقطتين A,B الموافقتين لـ $\theta_0=0$ و $\theta_1=\frac{\pi}{2}$

الحل: عبارة طول قوس منحني في الإحداثيات القطبية

$$S(\theta)=\int_{\theta_0}^{\theta_1}\sqrt{r_\theta'^2+r^2}\,d\theta$$

للفهم دون حفظ هذا القانون، راجع تمرين ص 439

$r'_\theta=ake^{k\theta}$

$r'^2=a^2k^2e^{2k\theta}$

$r^2=a^2e^{2k\theta}$

$$\Rightarrow S=\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2k^2e^{2k\theta}+a^2e^{2k\theta}}\,d\theta=a\sqrt{k^2+1}\int_0^{\pi/2}e^{k\theta}\,d\theta$$

$$=\frac{a\sqrt{k^2+1}}{k}\left[e^{k\frac{\pi}{2}}-1\right]$$

احسب طول قوس المنحني $x = 4a\cos^3 t \qquad y = 4a\sin^3 t$

المحصور بين نقطتين موافقتين للقيمتين t_0, t_1

الحل:

$$x' = -12a\cos^2 t\,\sin t$$

$$y' = 12a\sin^2 t\,\cos t$$

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{144a^2\cos^4 t\,\sin^2 t + 144a^2\sin^4 t\,\cos^2 t}\;dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} 12a\sin t\cos t\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\;dt$$

$$= 6a\int_{t_0}^{t_1} \sin t\cos t\;dt = \frac{6a}{2}\int_{t_0}^{t_1} \sin 2t\;dt$$

$$= \frac{3a}{2}\left(-\cos 2t\right)\Big|_{t_0}^{t_1} = -\frac{3a}{2}\left(\cos 2t_1 - \cos 2t_0\right)$$

تمرين أوجد متجه وحدة المماس للمنحني المعرف بالمعادلات.

$x = a\,ch\,t\cos t \qquad y = a\,ch\,t\sin t \qquad z = at$

في النقطة الموافقة للقيمة $t = 0$

الحل:

$$x' = a\,sh\,t\cos t - a\,ch\,t\sin t$$

$$y' = a\,sh\,t\sin t + a\,ch\,t\cos t$$

$$z' = a$$

$$|r'(t)| = \sqrt{a^2(sh\,t\cos t - ch\,t\sin t)^2 + a^2(sh\,t\sin t + ch\,t\cos t)^2 + a^2}$$

$$sh^2t\cos^2t - 2\,sh\,t\cos t\,ch\,t\sin t + ch^2t\sin^2t$$

$$sh^2t\sin^2t + 2\,sh\,t\sin t\,ch\,t\cos t + ch^2t\cos^2t$$

~~$|r'(t)| = \sqrt{2a^2 ch^2 t\sin^2 t + 2a^2 sh^2 t}$~~

$$\Rightarrow |\acute{r}(t)| = \sqrt{a^2 sh^2 t\,(\cos^2 t + \sin^2 t) + a^2 ch^2 t\,(\sin^2 t + \cos^2 t) + a^2}$$

$$\Rightarrow |\acute{r}(t)| = \sqrt{a^2(ch^2 t + \underbrace{sh^2 t + 1}_{ch^2 t})}$$

$ch^2 t - sh^2 t = 1$

$\Rightarrow ch^2 t = 1 + sh^2 t$

$$\Rightarrow |\acute{r}(t)| = \sqrt{2a^2 ch^2 t} = \sqrt{2}\, a\, ch\, t$$

$$T = \left(\frac{sh\,t \cos t - ch\,t \sin t}{\sqrt{2}\, ch\,t}, \frac{a\,sh\,t \sin t + a\,ch\,t \cos t}{\sqrt{2}\, ch\,t}, \frac{1}{\sqrt{2}\, ch\,t} \right)$$

وفي النقطة $t=0$ يكون

$ch\,0 = 1$

$sh\,0 = 0$

$$T = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

تمرين ليكن المنحني C المعطى بالمعادلات:

$x = 2\cos^3 t \qquad y = 2\sin^3 t \qquad z = 3\cos 2t$

أوجد متجهات الوحدة T, N, B في النقطة M من المنحني الموافقة للقيمة $t = 0$

ثم احسب طول قوس المنحني بين النقطتين $t_0 = 0$ و $t_1 = \frac{\pi}{4}$

الحل:

$x' = -6 \sin t \cos^2 t$

$y' = 6 \cos t \sin^2 t$

$z' = -6 \sin 2t$

$$|\acute{r}(t)| = \sqrt{36 \sin^2 t \cos^4 t + 36 \cos^2 t \sin^4 t + 36 \sin^2 2t}$$

$$= 6\sqrt{\sin^2 t \cos^4 t + \cos^2 t \sin^4 t + \sin^2 2t}$$

$$= 6\sqrt{\sin^2 t\,(\cos^4 t + \cos^2 t \underbrace{\sin^2 t}_{(1-\cos^2 t)}) + \underbrace{\sin^2 2t}_{(2\sin t \cos t)^2}}$$

$$= 6\sqrt{\sin^2 t\,(\cos^4 t + \cos^2 t - \cos^4 t) + 4 \sin^2 t \cos^2 t}$$

$$= 6\sqrt{\sin^2 t \cos^2 t + 4 \sin^2 t \cos^2 t}$$

$$= 6\sqrt{5 \underbrace{\sin^2 t \cos^2 t}_{\frac{\sin^2 2t}{4}}} = 6\sqrt{5}\sqrt{\frac{\sin^2 2t}{4}} = \frac{6}{2}\sqrt{5}\sin 2t$$

$$= 3\sqrt{5}\sin 2t$$

$$T = \left(\frac{-6 \sin t \cos^2 t}{6\sqrt{5} \cos t \sin t}, \frac{6 \cos t \sin^2 t}{6\sqrt{5} \sin t \cos t}, \frac{-6 \sin 2t}{3\sqrt{5} \sin 2t} \right)$$

$$\Rightarrow T = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}} \cos t, \frac{1}{\sqrt{5}} \sin t, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

وفي النقطة $t=0$ نجد :

$$T = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-2}{\sqrt{5}} \right)$$

$$N = \frac{T'}{|T'|} \qquad T' = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \sin t, \frac{1}{\sqrt{5}} \cos t, 0 \right)$$

$$|T'| = \sqrt{\frac{1}{5}(\sin^2 t + \cos^2 t)} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow N = (\sin t, \cos t, 0)$$

وفي النقطة $t=0$ نجد :

$$N = (0, 1, 0)$$

$$\vec{B} = T \times N =$$

لنأخذ متجهي T, N عند $t=0$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{2}{\sqrt{5}} \vec{i} - \frac{1}{\sqrt{5}} \vec{k}$$

$$\Rightarrow B = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\acute{r}(t)|\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 3\sqrt{5} \sin 2t \, dt = -\frac{3\sqrt{5}}{2} \cos 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\frac{3\sqrt{5}}{2}\left[\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right] = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

($\cos\frac{\pi}{2} \to 0$, $\cos 0 \to -1$)

طلب إضافي: أوجد معادلة المستقيم المماس في النقطة t . $\frac{\pi}{4}$

$$\frac{x - x(t_0)}{\acute{x}(t_0)} = \frac{y(t) - y(t_0)}{\acute{y}(t_0)} = \frac{z(t) - z(t_0)}{\acute{z}(t_0)}$$

$$\frac{x - 2\cos^3\frac{\pi}{4}}{-6\sin\frac{\pi}{4}\cos^2\frac{\pi}{4}} = \frac{y - 2\sin^3\frac{\pi}{4}}{6\cos\frac{\pi}{4}\sin^2\frac{\pi}{4}} = \frac{z - 3\cos\frac{\pi}{2}}{-6\sin\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{x - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3}{-6 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{y - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3}{6 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{z - 0}{-6}$$

$$\frac{x - \frac{1}{\sqrt{2}}}{-\frac{3}{\sqrt{2}}} = \frac{y - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{3}{\sqrt{2}}} = \frac{z}{-6}$$

$$\boxed{\frac{x\sqrt{2} - 1}{-3} = \frac{y\sqrt{2} - 1}{3} = \frac{z}{-6}}$$

معادلة المستقيم المماس في $t = \frac{\pi}{4}$

س/ أوجد منشور وناشر المنحني المعرف بالدالة $r = a e^{k\theta}$

الحل : $x = r\cos\theta$ إحداثيات قطبية

$y = r\sin\theta$

$x = a e^{k\theta}\cos\theta \qquad y = a e^{k\theta}\sin\theta$

$x' = ak e^{k\theta}\cos\theta - a e^{k\theta}\sin\theta = a e^{k\theta}(k\cos\theta - \sin\theta)$

$y' = ak e^{k\theta}\sin\theta + a e^{k\theta}\cos\theta = a e^{k\theta}(k\sin\theta + \cos\theta)$

$x'' = ak e^{k\theta}(k\cos\theta - \sin\theta) + a e^{k\theta}(-k\sin\theta - \cos\theta)$

$= ak^2 e^{k\theta}\cos\theta - ak e^{k\theta}\sin\theta - ak e^{k\theta}\sin\theta - a e^{k\theta}\cos\theta$

$= a e^{k\theta}(k^2\cos\theta - \cos\theta) - 2ak e^{k\theta}\sin\theta$

$, x'' = a e^{k\theta}(k^2\cos\theta - \cos\theta - 2k\sin\theta)$

$y'' = ak e^{k\theta}(k\sin\theta + \cos\theta) + a e^{k\theta}(k\cos\theta - \sin\theta)$

$= ak^2 e^{k\theta}\sin\theta + ak e^{k\theta}\cos\theta + ak e^{k\theta}\cos\theta - a e^{k\theta}\sin\theta$

$= a e^{k\theta}(k^2\sin\theta - \sin\theta) + 2ak e^{k\theta}\cos\theta$

$\Rightarrow y'' = a e^{k\theta}[k^2\sin\theta - \sin\theta + 2k\cos\theta]$

نعوض في معادلات المنشور :

$$x^* = x - y' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}$$

$$y^* = y + x' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}$$

Scanned by CamScanner

لإيجاد معادلة الناشر :

$$s(t) = \int_0^{\theta} \sqrt{x'^2 + y'^2} \, d\tau$$

$$x'^2 = a^2 e^{2k\theta} (k^2 \cos^2\theta - 2k \cos\theta \sin\theta + \sin^2\theta)$$

$$y'^2 = a^2 e^{2k\theta} (k^2 \sin^2\theta + 2k \cos\theta \sin\theta + \cos^2\theta)$$

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{a^2 e^{2k\theta} \cdot [k^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + 1]}$$

$$= \sqrt{a^2 e^{2k\theta} (k^2 + 1)} = a e^{k\theta} \sqrt{k+1}$$

$$\Rightarrow s = \int_0^{\theta} a\sqrt{k+1} \, e^{k\tau} \, d\tau = a\sqrt{k+1} \left(\frac{1}{k} e^{k\tau} \Big|_0^{\theta} \right)$$

$$= \frac{a\sqrt{k+1}}{k} [e^{k\theta} - 1]$$

معادلة الناشر

$$r^* = r + (c - s) T$$

$$\Rightarrow x^* = a e^{k\theta} \cos\theta + \left[c - \frac{a\sqrt{k+1}}{k} (e^{k\theta} - 1) \right] \alpha$$

$$y^* = a e^{k\theta} \sin\theta + \left[c - \frac{a\sqrt{k+1}}{k} (e^{k\theta} - 1) \right] \beta$$

حيث

مركبات المماس

$$\alpha = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

$$\beta = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

تمرين | أوجد معادلات ناشر السلسلة

$$y = ch\, x$$

الحل: نأخذ التمثيل الوسيطي

$$x = t \qquad y = ch\, t$$

$$x' = 1 \qquad y' = sh\, t$$

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{1 + sh^2 \tau}\, d\tau = \int_0^t \sqrt{ch^2 \tau}\, d\tau = ch\, \tau \Big|_0^t = ch\, t - 1$$

$$r' = (1, sh\, t)$$

$$|r'| = ch\, t \qquad T = \left(\frac{1}{ch\, t} , \frac{sh\, t}{ch\, t} \right)$$

$$x^* = x + (c - s)\alpha = t + [c - (ch\, t - 1)] \frac{1}{ch\, t}$$

$$y^* = y + (c - s)\beta = ch\, t + [c - (ch\, t - 1)] \frac{sh\, t}{ch\, t}$$